# Moduli extremer reflexiver Garben auf Pn

Okonek, C

DOI: https://doi.org/10.1515/crll.1983.338.183



Originally published at:
Okonek, C (1983). Moduli extremer reflexiver Garben auf Pn. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 1983(338):183-194.
DOI: https://doi.org/10.1515/crll.1983.338.183

# Moduli extremer reflexiver Garben auf $\mathbb{P}^n$ *)

Von *Christian Okonek* in Göttingen

## 0. Einleitung

In [8] und [9] haben wir damit begonnen, Modulräume stabiler reflexiver Garben vom Rang 2 auf projektiven Räumen zu untersuchen. Diese Untersuchungen sollen hier fortgeführt werden. Von besonderem Interesse sind reflexive Garben mit homologischer Dimension $\leqq 1$, da sie zu 2-codimensionalen Cohen Macauley Unterschemata in Beziehung stehen [8]. Aus diesem Grund stellen wir zunächst einige einfache Eigenschaften solcher Garben zusammen (Serre Dualität, kohomologisches Kriterium). Mit Hilfe der Einschränkungssätze von Barth [1], Ein [3], Hartshorne [5] und Maruyama [6] lassen sich viele Resultate über reflexive Garben auf $\mathbb{P}^3$ übertragen auf reflexive Garben auf $\mathbb{P}^n$. So bekommt man etwa Verschwindungssätze für $H^1(F(-k))\; k \gg 0$ und $H^{n-1}(F(k))\; k \gg 0$.

Mit der gleichen Methode gewinnt man Ungleichungen für die Chernklassen reflexiver Garben auf $\mathbb{P}^n$ aus den entsprechenden Ungleichungen auf $\mathbb{P}^3$ und $\mathbb{P}^4$ [4], [5], [7], [8]. Insbesondere zeigt sich, daß die dritte Chernklasse $c_3$ einer normierten (semi-)stabilen reflexiven Garbe vom Rang 2 auf $\mathbb{P}^4$ durch ein quadratisches Polynom in $c_2$ nach oben beschränkt ist. Diese — von Hartshorne [5] angegebenen — Schranken sind scharf. Eine Garbe, die diese Schranke annimmt, heißt extreme Garbe (ihre Singularitätenmenge hat den größtmöglichen Grad).

Der Rest dieser Arbeit besteht in der Untersuchung dieser extremen Garben. Dazu gehen wir folgendermaßen vor: Wir klassifizieren zunächst die extremen Garben auf $\mathbb{P}^3$, soweit dies nicht schon in [5] und [8] geschehen ist. Ist nun $F$ eine extreme Garbe auf $\mathbb{P}^n$ $(n>3)$, so bekommt man durch Beschränkung auf eine generische Hyperebene $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ eine extreme Garbe $F_{\mathbb{P}^{n-1}}$ auf $\mathbb{P}^{n-1}$. Durch Induktion über $n$ wird nun ein Teil der Kohomologie von $F$ bestimmt. In dem meisten Fällen liest man aus der Kohomologie von $F$ ab, daß $F$ eine instabile Hyperebene $H$ von sehr hoher Ordnung $(\sim c_2)$ besitzen muß [5], [8]. Der Reduktionsschritt bezüglich dieser Hyperebene $H$ führt dann auf eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow J_{Z,H}(-r) \longrightarrow 0,$$

wobei $F'$ eine reflexive Garbe vom Rang 2 von sehr viel einfacherer Natur ist. Aus der Bestimmung von $F'$ und $Z$ gewinnt man dann eine Auflösung von $F$ durch direkte Summen von Geradenbündeln, aus der man alle übrige Information bekommen kann.

*) Dies ist ein Teil meiner Habilitationsschrift



0075-4102/83/0338-0010$02.00

In den Fällen, in denen die Methode des Reduktionsschrittes nicht angewendet werden kann, gelangt man mit der Beilinson Spektralsequenz [2], [7] zum Ziel. Auf diese Weise werden die Modulräume der stabilen extremen Garben auf $\mathbb{P}^n$ für beliebiges $n$ bestimmt. Sie sind irreduzibel und glatt.

## 1. Eigenschaften reflexiver Garben auf $\mathbb{P}^n$

Sei $k$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n_k$ der projektive Raum der Dimension $n$ über $k$. Eine kohärente Garbe $F$ auf $\mathbb{P}^n$ heißt reflexiv [5], wenn der kanonische Morphismus $F \to F^{\vee\vee}$ ein Isomorphismus ist.

Sei $F_x$ der Halm von $F$ in $x \in \mathbb{P}$, $\mathcal{O}_x$ der Halm der Strukturgarbe in $x$; wir bezeichnen die projektive Dimension von $F_x$ über $\mathcal{O}_x$ mit $pd_{\mathcal{O}_x}(F_x)$ und setzen

$$hd(F) = \sup_{x \in \mathbb{P}^n} pd_{\mathcal{O}_x}(F_x).$$

Die Zahl $hd(F)$ heißt homologische Dimension von $F$. Es gilt

$$hd(F) \leqq d \Leftrightarrow \mathcal{E}xt^i_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = 0 \qquad i > d.$$

Wir werden uns im wesentlichen auf Garben mit homologischer Dimension $\leqq 1$ beschränken. Für solche Garben ist die Singularitätenmenge

$$S(F) = \{x \in \mathbb{P}^n \mid pd_{\mathcal{O}_x}(F_x) > 0\}$$

der Träger der kohärenten Garbe $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$. Eine kohärente Garbe $F$ auf $\mathbb{P}^n$ ist genau dann reflexiv, wenn sie torsionsfrei ist und für Punkte $x$ mit $\dim \mathcal{O}_x \geqq 2$ gilt $\operatorname{depth}_{\mathcal{O}_x} F_x \geqq 2$ [5]. Folglich gilt für reflexive Garben auf $\mathbb{P}^n$ stets $hd(F) \leqq n-2$. Eine kohärente Garbe $F$ auf $\mathbb{P}^n$ mit homologischer Dimension $\leqq 1$ ist genau dann torsionsfrei (reflexiv), wenn die Codimension ihrer Singularitätenmenge mindestens 2 (3) ist [8].

Im folgenden bezeichnen wir mit $\omega$ die dualisierende Garbe des $\mathbb{P}^n$ und schreiben $\mathcal{O}$ statt $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ für die Strukturgarbe. Es gilt:

**Proposition 1. 1** (Serre Dualität). *Sei $F$ eine kohärente Garbe auf $\mathbb{P}^n$ mit $hd(F) \leqq 1$. Dann gilt $H^n(F)' \cong H^0(F^\vee \otimes \omega)$ und es besteht eine exakte Sequenz*

$$\begin{aligned}0 &\to H^1(F^\vee \otimes \omega) \to H^{n-1}(F)' \to H^0(\mathcal{E}xt^1(F, \omega)) \to H^2(F^\vee \otimes \omega) \to H^{n-2}(F)' \\ &\to \cdots \to H^2(F)' \to H^{n-3}(\mathcal{E}xt^1(F, \omega)) \to H^{n-1}(F^\vee \otimes \omega) \to H^1(F)' \to 0.\end{aligned}$$

*Beweis.* Dies folgt aus der allgemeinen Serre Dualität

$$\operatorname{Ext}^{n-i}(F, \omega) \cong H^i(F)'$$

und der Spektralsequenz

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathcal{E}xt^q(F, \omega)) = \operatorname{Ext}^{p+q}(F, \omega).$$

**Corollar 1. 2.** *Für eine kohärente Garbe $F$ auf $\mathbb{P}^n$ mit $hd(F) \leqq 1$ gilt $H^i(F(-k)) = 0$ für $k \gg 0$ und $i = 0, 1, \ldots, n-2$.*

*Beweis.* Dies folgt mit Theorem B aus der exakten Sequenz der Serre Dualität.

**Lemma 1. 3.** *Eine reflexive Garbe auf $\mathbb{P}^n$ hat genau dann homologische Dimension $\leqq 1$, wenn für $k \gg 0$ und $i = 2, 3, \ldots, n-2$ $H^i(F(-k)) = 0$ ist.*

*Beweis.* Für hinreichend große $k$ gilt

$$H^i(F(-k))' \cong \operatorname{Ext}^{n-i}(F(-k), \omega) \cong H^0(\mathscr{E}xt^{n-i}(F, \omega) \otimes \mathcal{O}(k)).$$

Nach Theorem A verschwindet $H^i(F(-k))$ also genau dann für große $k$, wenn die Garben $\mathscr{E}xt^{n-i}(F, \omega)$ gleich Null sind. Da für reflexive Garben $F$ $hd(F) \leqq n-2$ ist, folgt die Behauptung zusammen mit Corollar 1. 2.

**Bemerkung 1. 4.** Die Singularitätenmenge $S(F)$ einer kohärenten Garbe $F$ vom Rang 2 mit $hd(F) = 1$ ist stets 3-codimensional. Wäre nämlich $\operatorname{cod}(S(F), \mathbb{P}^n) > 3$, so wäre (Serre Dualität für $F(k)$) $H^{n-1}(F(-k)) = 0$ für große $k$. Daraus würde (Serre Dualität) aber $H^0(\mathscr{E}xt^1(F, \omega) \otimes \mathcal{O}(k)) = 0$ folgen für $k \gg 0$. Das ist bei $hd(F) = 1$ unmöglich.

Für jede kohärente Garbe auf $\mathbb{P}^n$ sind Chernklassen $c_i = c_i(F)$ definiert $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Identifiziert man den Chow Ring $A^*(\mathbb{P}^n)$ mit $\mathbb{Z}[h]/(h^{n+1})$, wobei $h$ der Klasse der Hyperebenen entspricht, so kann man die Chernklassen als ganze Zahlen auffassen. Das Chernpolynom von $F$ bezeichnen wir dann mit $c_t(F)$. Sei $F$ etwa kohärent vom Rang 2 mit $hd(F) \leqq 1$. Für das Chernpolynom von $\mathscr{E}xt^1(F, \mathcal{O})$ gilt dann

$$\begin{aligned} c_t(\mathscr{E}xt^1(F, \mathcal{O})) &= c_t(F(-c_1))/c_{-t}(F) \\ &= 1 + (2c_3)\, t^3 + (3c_1 c_3)\, t^4 + (2c_5 + 2c_1 c_4 + 4c_1^2 c_3 - 2c_2 c_3)\, t^5 + \cdots. \end{aligned}$$

Um dies zu sehen, geht man von einer lokal freien Auflösung $0 \to E_1 \to E_0 \to F \to 0$ aus, dualisiert zu $0 \to F^\vee \to E_0^\vee \to E_1^\vee \to \mathscr{E}xt^1(F, \mathcal{O}) \to 0$ und erhält

$$\begin{aligned} c_t(\mathscr{E}xt^1(F, \mathcal{O})) &= c_t(E_1^\vee)\, c_t(E_0^\vee)^{-1}\, c_t(F^\vee) \\ &= c_{-t}(E_1)\, c_{-t}(E_0)^{-1}\, c_t(F(-c_1)) = c_{-t}(F)^{-1}\, c_t(F(-c_1)). \end{aligned}$$

**Definition 1. 5.** Eine reflexive Garbe $F$ auf $\mathbb{P}^n$ ist stabil (semistabil), wenn für jede kohärente Untergarbe $F' \subset F$ mit $0 < \operatorname{rg} F' < \operatorname{rg} F$ gilt $\mu(F') < \mu(F)$ $(\mu(F') \leqq \mu(F))$ mit $\mu(-) = c_1(-)/\operatorname{rg}(-)$.

Ist $F$ reflexiv, vom Rang 2 und normiert ($c_1 \in \{0, -1\}$), so ist $F$ genau dann stabil, wenn $H^0(F) = 0$ ist. Falls $c_1 = 0$ ist, ist $F$ genau dann semistabil, wenn $H^0(F(-1)) = 0$ ist [5].

Eine stabile (semistabile) reflexive Garbe vom Rang 2 auf $\mathbb{P}^n$ $(n > 3)$ bleibt bei Beschränkung auf eine generische Hyperebene $H \subset \mathbb{P}^n$ stabil (semistabil) und reflexiv [1], [3], [5], [6].

Ohne Mühe lassen sich daher Verschwindungssätze [5] und Abschätzungen für Chernklassen [5], [8] übertragen. Der Vollständigkeit halber wollen wir dies hier aufschreiben:

**Proposition 1. 6.** *Sei F eine stabile (semistabile) reflexive Garbe vom Rang 2 auf $\mathbb{P}^n$. Dann gilt* $(c_i = c_i(F))$:

i) $c_1 = -1$:

$$H^1(F(l)) = 0 \quad \text{für} \quad l \leqq -\frac{1}{2}(c_2+1),$$
$$H^{n-1}(F(l)) = 0 \quad \text{für} \quad l \geqq c_2 - (n-1).$$

ii) $c_1 = 0$:

$$H^1(F(l)) = 0 \quad \text{für} \quad l \leqq -\frac{1}{2}(c_2+2) \quad \left(l \leqq -\frac{1}{2}(c_2+3)\right),$$
$$H^{n-1}(F(l)) = 0 \quad \text{für} \quad l \geqq c_2 - n \quad (l \geqq c_2 - (n-1)).$$

*Beweis.* Dies folgt durch Induktion aus dem entsprechenden Verschwindungssatz auf $\mathbb{P}^3$ [5].

**Proposition 1. 7.** *Sei F eine stabile (semistabile) normierte reflexive Garbe vom Rang 2 auf $\mathbb{P}^n$. Dann gelten folgende Ungleichungen*

i) $c_1^2 - 4c_2 < 0 \quad (c_1^2 - 4c_2 \leqq 0)$;

ii) $$0 \leqq c_3 \leqq \begin{cases} c_2^2 - c_2 + 2 & \text{falls} \quad c_1 = 0, \\ c_2^2 & \text{falls} \quad c_1 = -1, \end{cases} \qquad (0 \leqq c_3 \leqq c_2^2 + c_2);$$

iii) $$c_4 \leqq \begin{cases} c_2^3 - c_2^2 + c_2 + 3 & \text{falls} \quad c_1 = 0, \\ c_2^2(c_2+1) & \text{falls} \quad c_1 = -1, \end{cases} \qquad (c_4 \leqq c_2(c_2+1)^2).$$

Wir nennen eine stabile (semistabile) reflexive Garbe $F$ vom Rang 2 auf $\mathbb{P}^n$ extrem, wenn ihre dritte Chernklasse maximal ist. Diese extremen Garben sollen im folgenden klassifiziert werden.

## 2. Klassifikation extremer Garben

Im folgenden bezeichnet $F$ stets eine stabile (semistabile) reflexive Garbe vom Rang 2 auf $\mathbb{P}^n$ mit $c_1(F) \in \{0, -1\}$. Bei der Klassifikation extremer Garben verwenden wir wesentlich die von Hartshorne [5] eingeführte Methode des Reduktionsschrittes bezüglich einer instabilen Hyperebene, die wir daher hier kurz angeben wollen.

Eine instabile Hyperebene für $F$ ist eine Hyperebene $H \subset \mathbb{P}^n$, für die es eine ganze Zahl $r > 0$ gibt mit $H^0(F_H^\vee(-r)) \neq 0$. Die größte dieser Zahlen $r$ heißt die Ordnung der instabilen Hyperebene.

Wenn nun $F$ eine instabile Hyperebene $H$ der Ordnung $r > 0$ besitzt, kann man einen Reduktionsschritt durchführen [5], [8]: Nach Voraussetzung existiert ein Monomorphismus

$$s_H : \mathcal{O}_H \longrightarrow F_H^\vee(-r).$$

Dualisiert man $s_H$, so erhält man (nach Vertwisten)

$$F_H^{\vee\vee} \longrightarrow \mathcal{O}_H(-r).$$

Diesen Morphismus kann man nun mit

$$F \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow F_H \hookrightarrow F_H^{\vee\vee}$$

zusammensetzen zu einem Morphismus

$$F \longrightarrow \mathcal{O}_H(-r).$$

Sei $F'$ der Kern, $J_{Z,H}(-r)$ das Bild, also

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow J_{Z,H}(-r) \longrightarrow 0$$

exakt. $J_{Z,H}$ definiert ein 2-codimensionales Unterschema $Z$ in $H$ und $F'$ ist reflexiv mit den Chernklassen

$$c_1(F') = c_1(F) - 1, \qquad c_2(F') = c_2(F) - r - c_1(F).$$

Falls $n=3$ ist, gilt $c_3(F') = c_3(F) - c_2(F) - c_1(F)\, r - r^2 + 2s$ mit $s = \text{Länge}\ (\mathcal{O}_Z)$.

Wir beginnen nun die Klassifikation der semistabilen extremen Garben.

**Lemma 2. 1.** *Sei $F$ eine semistabile, reflexive Garbe vom Rang 2 auf $\mathbb{P}^3$ mit $c_1 = 0$, $c_3 = c_2^2 + c_2$, $c_2 > 1$. $F$ besitzt eine eindeutig bestimmte instabile Hyperebene $H$ der Ordnung $c_2(F)$ und ist gegeben durch zwei Formen $f$ und $g$ auf $H$ vom Grad $c_2(F)$, $c_2(F)+1$, die keine gemeinsamen Komponenten haben.*

*Beweis.* Sei $\{k_i\}_{i=1,\ldots,c_2}$ das Spektrum von $F$ [5], $k = \min_i \{k_i\}$. Es gilt [5]

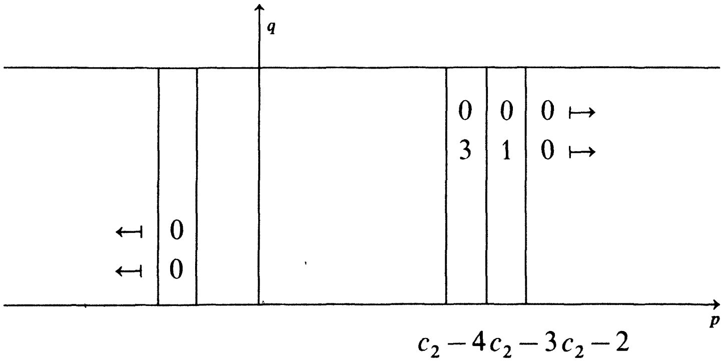
$$\frac{c_3}{2} = \sum_{i=1}^{c_2} (-k_i) \leqq \frac{c_2^2 + c_2}{2} = \binom{c_2+1}{2},$$

also $\sum_{i=1}^{c_2} (-k_i) \leqq \sum_{i=1}^{c_2} i$. Aus dem Zusammenhang des Spektrums folgt: es ist

$$c_3 = c_2^2 + c_2$$

genau dann, wenn $k_i = -i$ gilt.

Damit bekommt man folgende Kohomologietabelle (eingetragen sind die Zahlen $h^q(F(p))$):



Die Paarung

$$H^2(F(c_2-4)) \otimes H^0(\mathcal{O}(1)) \longrightarrow H^2(F(c_2-3))$$

ist aus Dimensionsgründen entartet, es gibt also eine Linearform $h \in H^0(\mathcal{O}(1))$, die $H^2(F(c_2-4))$ annulliert. Sei $H$ die zugehörige (Hyper-)Ebene. Aus der Kohomologiesequenz zu

$$0 \longrightarrow F(c_2-4) \xrightarrow{h} F(c_2-3) \longrightarrow F_H(c_2-3) \longrightarrow 0$$

erhält man $h^2(F_H(c_2-3))=1$, also $h^0(F_H^\vee(-c_2)) \neq 0$. $H$ ist also eine (eindeutig bestimmte) instabile Hyperebene der Ordnung $c_2$. Der Reduktionsschritt liefert die Sequenz

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow J_{Z,H}(-c_2) \longrightarrow 0,$$

wobei die reflexive Garbe $F'$ die Chernklassen

$$c_1(F') = -1, \quad c_2(F')=0, \quad c_3(F')=2 \text{ Länge } (\mathcal{O}_Z)$$

hat. Es ist $H^0(F') \cong H^0(F)$. Sei also $s \in H^0(F') \setminus \{0\}$ ein nicht trivialer Schritt. Da $H^0(F'(-1))=0$ ist, ist das Nullstellenschema $(s)_0$ 2-codimensional oder leer, wegen $c_2(F')=0$ also leer. Es folgt $F' \cong \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1)$, also $Z=\emptyset$. Damit ist $F$ als Extension dargestellt:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1) \longrightarrow F \longrightarrow \mathcal{O}_H(-c_2) \longrightarrow 0.$$

Setzt man diese Extension mit der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-c_2-1) \xrightarrow{\cdot h} \mathcal{O}(-c_2) \longrightarrow \mathcal{O}_H(-c_2) \longrightarrow 0$$

zusammen, so erhält man das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & \mathcal{O}(-c_2-1) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathcal{O}(-c_2-1) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-c_2) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}(-c_2) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1) \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_H(-c_2) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

dessen mittlere Spalte dann die exakte Sequenz

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{(h,f,g)} \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(c_2) \oplus \mathcal{O}(c_2+1) \longrightarrow F(c_2+1) \longrightarrow 0$$

liefert, aus der die weiteren Behauptungen des Lemmas folgen.

Insbesondere sieht man, daß die Singularitätenmenge $S(F)$ von $F$ genau der vollständige Durchschnitt der Hyperflächen $(f)_0$ und $(g)_0$ mit $H$ ist, $S(F) = H \cap (f)_0 \cap (g)_0$. Aus der Auflösung $(*)$ entnimmt man weiter, daß diese Garben sich auf beliebig große $\mathbb{P}^n$ fortsetzen lassen.

Wir haben oben $c_2(F) > 1$ vorausgesetzt. Der Fall $c_2(F) = 1$ muß getrennt behandelt werden.

**Lemma 2. 2.** *Sei F eine semistabile reflexive Garbe vom Rang 2 auf* $\mathbb{P}^3$ *mit* $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = 2$. *Es gibt eine eindeutig bestimmte Gerade L, so daß jede Ebene H, die L enthält, instabil von der Ordnung* 1 *für F ist. F hat eine Auflösung*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{(h_1, h_2, f)} \mathcal{O}(1)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}(2) \longrightarrow F(2) \longrightarrow 0.$$

*Die Singularitätenmenge besteht aus zwei Punkten auf L.*

*Beweis.* Das Spektrum von $F$ ist $\{-1\}$, man bekommt daher folgende Kohomologie

$$\begin{array}{cccc|l}
 & & & & q \\
0 & 0 & 0 & 0 & \\
2 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & & & & p
\end{array}$$

Die gleichen Überlegungen wie in Lemma 2. 1 ergeben dann die Behauptung.

Auch diese Garben lassen sich auf beliebig große $\mathbb{P}^n$ fortsetzen.

**Theorem 2. 3.** *Sei F eine semistabile reflexive Garbe vom Rang* 2 *auf* $\mathbb{P}^n$ $(n \geqq 3)$ *mit* $c_1 = 0$, $c_3 = c_2^2 + c_2$. *Dann gilt* $hd(F) = 1$ *und*

$$c_t(F) = \frac{(1-t)(1-c_2 t)}{1-(c_2+1)t}.$$

*F hat eine Auflösung der Form*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-c_2-1) \longrightarrow \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-c_2) \longrightarrow F \longrightarrow 0.$$

*Die Singularitätenmenge* $S(F)$ *von F ist der vollständige Durchschnitt zweier Hyperflächen vom Grad* $c_2$ *und* $c_2 + 1$ *in einer (für* $c_2 > 1$ *eindeutig bestimmten) instabilen Hyperebene H der Ordnung* $c_2$.

*Beweis.* Der Beweis wird durch Induktion über $n$ geführt.

Wir betrachten die Beschränkung von $F(k)$ auf eine generische Hyperebene $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$:

$$0 \longrightarrow F(k-1) \longrightarrow F(k) \longrightarrow F_{\mathbb{P}^{n-1}}(k) \longrightarrow 0.$$

Aus der zugehörigen langen exakten Kohomologiesequenz entnimmt man — durch Induktion über $n$ —

$$h^1(F(*)) = h^2(F(*)) = \cdots = h^{n-2}(F(*)) = 0,$$

insbesondere gilt $hd(F) = 1$ (Lemma 1. 3).

Ebenfalls durch Induktion über $n$ erhält man

$$h^{n-1}\big(F(c_2-n)\big)=1\,,\qquad h^{n-1}\big(F(k)\big)=0\quad \text{für}\quad k>c_2-n$$

und

$$h^{n-1}\big(F(c_2-n-1)\big)=\begin{cases} n & \text{für}\quad c_2>1\,,\\ n-1 & \text{für}\quad c_2=1\,.\end{cases}$$

Daher ist die Paarung

$$H^{n-1}\big(F(c_2-n-1)\big)\oplus H^0\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\big)\longrightarrow H^{n-1}\big(F(c_2-n)\big)$$

entartet, es gibt eine Linearform $h\in H^0\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\big)$, die $H^{n-1}\big(F(c_2-n-1)\big)$ annulliert. Die zugehörige Hyperebene $H$ ist eine instabile Hyperebene der Ordnung $c_2$. Für $c_2>1$ ist $H$ eindeutig bestimmt. Der Reduktionsschritt liefert — wie auf $\mathbb{P}^3$ — eine exakte Sequenz

$$0\longrightarrow \mathcal{O}\oplus\mathcal{O}(-1)\longrightarrow F\longrightarrow \mathcal{O}_H(-c_2)\longrightarrow 0\,,$$

woraus man die Auflösung

$$0\longrightarrow\mathcal{O}\longrightarrow\mathcal{O}(1)\oplus\mathcal{O}(c_2)\oplus\mathcal{O}(c_2+1)\longrightarrow F(c_2+1)\longrightarrow 0$$

bekommt.

Als nächstes sollen die stabilen reflexiven Garben vom Rang 2 auf $\mathbb{P}^n$ mit $c_1=0$ und $c_3=c_2^2-c_2+2$ klassifiziert werden.

**Lemma 2. 4.** *Sei $F$ eine stabile reflexive Garbe vom Rang 2 auf $\mathbb{P}^3$ mit $c_1=0$, $c_2>3$, $c_3=c_2^2-c_2+2$. Dann gilt $hd(F)=1$ und $F$ besitzt eine eindeutig bestimmte instabile Ebene der Ordnung $c_2-1$. $F$ wird gegeben durch eine Auflösung*

$$0\longrightarrow\mathcal{O}(-2)\oplus\mathcal{O}(-c_2)\longrightarrow\mathcal{O}(-1)^{\oplus 3}\oplus\mathcal{O}(1-c_2)\longrightarrow F\longrightarrow 0\,.$$

*Beweis.* Wenn $c_3$ maximal ist, muß das Spektrum $\{k_i\}$ von $F$ das negativst mögliche sein, also

$$\{k_i\}=\{-1,\,-1,\,-2,\ldots,\,-c_2+1\}\,.$$

Eine leichte Rechnung ergibt

$$h^2\big(F(c_2-4)\big)=1\,,\qquad h^2\big(F(c_2-5)\big)=3\,,$$

es gibt also eine eindeutig bestimmte instabile Ebene $H$ der Ordnung $c_2-1$. Der Reduktionsschritt liefert die Sequenz

$$0\longrightarrow F'\longrightarrow F\longrightarrow J_{Z,H}(1-c_2)\longrightarrow 0,$$

wobei $F'$ stabil und reflexiv ist, und die Chernklassen

$$c_1(F)=-1\,,\quad c_2(F')=1\quad\text{und}\quad c_3(F')=2s+1$$

hat. Wir haben diese Garben in [8] klassifiziert; es folgt $s=0$, also $Z=\emptyset$ und $F'$ hat eine Auflösung

$$0\longrightarrow\mathcal{O}(-2)\longrightarrow\mathcal{O}(-1)^{\oplus 3}\longrightarrow F'\longrightarrow 0.$$

Zusammen mit der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-c_2) \xrightarrow{\cdot h} \mathcal{O}(1-c_2) \longrightarrow \mathcal{O}_H(1-c_2) \longrightarrow 0$$

kann man dann folgendes kommutatives Diagramm konstruieren:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(-2) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(-c_2) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}(-c_2) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(-1)^{\oplus 3} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}(-1)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}(1-c_2) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}(1-c_2) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F' \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_H(1-c_2) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Die mittlere Spalte liefert die gewünschte Auflösung. Die Fälle $c_2 \leqq 3$ müssen getrennt behandelt werden. Man sieht leicht, daß es keine stabilen reflexiven Garben $F$ auf $\mathbb{P}^3$ mit $c_1=0$, $c_2=1$ und $hd(F)>0$ gibt. Die beiden übrigen Fälle $c_2=2$ und $c_2=3$ sind in [9] behandelt worden. Gilt $c_2=2$, so besitzt $F$ eine Auflösung der Form

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-2)^{\oplus 2} \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^{\oplus 4} \longrightarrow F \longrightarrow 0.$$

Falls $c_2=3$ ist, hat $F$ folgende Auflösung:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-3) \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^{\oplus 3} \longrightarrow F \longrightarrow 0.$$

**Theorem 2.5.** *Sei $F$ eine stabile reflexive Garbe vom Rang* 2 *auf* $\mathbb{P}^n$ $(n \geqq 3)$ *mit* $c_1=0$, $c_3=c_2^2-c_2+2$. *Dann hat $F$ homologische Dimension* 1 *und es gilt*

$$c_t(F)=\frac{(1-t)^3\,(1+(1-c_2)\,t)}{(1-2t)\,(1-c_2 t)}.$$

*F hat eine Auflösung der Form*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(-c_2) \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}(1-c_2) \longrightarrow F \longrightarrow 0.$$

*Der Modulraum* $M^{st}_{\mathbb{P}^n}(0, c_2, c_2^2-c_2+2, \ldots)$ *dieser Garben ist irreduzibel und glatt von der Dimension*

$$4n+11+3\binom{c_2+n-1}{n}+3\binom{c_2+n-2}{n}-\binom{c_2+n-3}{n}.$$

*Beweis.* Die gesuchte Auflösung erhalten wir wieder durch Induktion über $n$. Durch Einschränken auf generische Hyperebenen und Induktion über $n$ erhält man

$$h^1(F(*))=h^2(F(*))=\cdots=h^{n-2}(F(*))=0$$

und $h^{n-1}(F(k))=0$ für $k \geqq c_2-n$. Eine leichte Rechnung liefert

$$h^{n-1}(F(c_2-n-1))=\begin{cases}1 & \text{für } c_2>2,\\ 2 & \text{für } c_2=2,\end{cases}$$

$$h^{n-1}(F(c_2-n-2))=\begin{cases}n & \text{für } c_2>3,\\ n+1 & \text{für } c_2=3,\\ 2n-2 & \text{für } c_2=2.\end{cases}$$

Falls $c_2>3$ ist, besitzt $F$ eine eindeutig bestimmte instabile Hyperebene $H$ der Ordnung $c_2-1$. Der Reduktionsschritt liefert die Sequenz

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow J_{Z,H}(1-c_2) \longrightarrow 0,$$

wobei $F'$ stabil mit den Chernklassen $c_1(F')=-1$, $c_2(F')=1$ ist. Es folgt $Z=\emptyset$ und man gewinnt — wie in Lemma 2. 4 — für $F$ die Auflösung

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-2)\oplus\mathcal{O}(-c_2) \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^{\oplus 3}\oplus\mathcal{O}(1-c_2) \longrightarrow F \longrightarrow 0.$$

In den Fällen $c_2=2$ und $c_2=3$ bekommt man die gewünschte Auflösung aus dem Satz von Beilinson. Aus diesen Auflösungen kann man die Irreduzibilität der Modulräume ablesen und die Dimension der Vektorräume $\operatorname{Ext}^i(F,F)$ bestimmen. So bekommt man die übrigen Aussagen des Satzes.

**Bemerkung 2. 6.** Aus der Sequenz $0\to F'\to F\to \mathcal{O}_H(1-c_2)\to 0$ folgt $(c_2>3)$ $H^0(F'(1))\cong H^0(F(1))$. Sei $s\in H^0(F(1))$ ein nichttrivialer Schnitt. Das Nullstellenschema $(s)_0$ besteht aus der Vereinigung eines linearen Teilraumes $E\cong\mathbb{P}^{n-2}$ und einer Hyperfläche $(f)_0$ vom Grad $c_2$ in der eindeutig bestimmten instabilen Hyperebene $H$. Der Durchschnitt von $E$ und $(f)_0$ ist die Singularitätenmenge $S(F')$ von $F'$, also isomorph zu $\mathbb{P}^{n-3}$.

Als letztes sollen noch die stabilen reflexiven Garben $F$ vom Rang 2 auf $\mathbb{P}^n$ mit $c_1=-1$ und $c_3=c_2^2$ klassifiziert werden. Für $n=3$ findet man diese Klassifikation bei Hartshorne [5] (siehe auch [8]).

**Theorem 2. 7.** *Sei $F$ eine stabile reflexive Garbe vom Rang 2 auf $\mathbb{P}^n$ $(n\geqq 3)$ mit $c_1=-1$, $c_3=c_2^2$. Dann hat $F$ homologische Dimension 1 und es gilt*

$$c_t(F)=\frac{(1-c_2t)(1-t)^2}{1-(c_2+1)t}.$$

*$F$ besitzt eine Auflösung der Form*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-c_2-1) \longrightarrow \mathcal{O}(-c_2)\oplus\mathcal{O}(-1)^{\oplus 2} \longrightarrow F \longrightarrow 0.$$

*Der Modulraum $M^{st}_{\mathbb{P}^n}(-1,c_2,c_2^2,\ldots)$ dieser Garben ist irreduzibel und glatt von der Dimension*

$$n+2\binom{c_2+n}{n}-2\binom{c_2+n-1}{n}-4-2h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1-c_2)).$$

*Beweis.* Aus der Klassifikation auf $\mathbb{P}^3$ bekommt man durch Induktion über $n$

$$h^1(F(*)) = h^2(F(*)) = \cdots = h^{n-2}(F(*)) = 0,$$

$$h^{n-1}(F(k)) = 0 \quad \text{für} \quad k \geqq c_2 - (n-1), \qquad h^{n-1}(F(c_2 - n)) = 1$$

und

$$h^{n-1}(F(c_2 - n - 1)) = \begin{cases} n & \text{für} \quad c_2 > 1, \\ n-2 & \text{für} \quad c_2 = 1. \end{cases}$$

Es existiert eine instabile Hyperebene $H$ der Ordnung $c_2$. Der Reduktionsschritt liefert die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^{\oplus 2} \longrightarrow F \longrightarrow \mathcal{O}_H(-c_2) \longrightarrow 0.$$

Mit Hilfe der Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-c_2 - 1) \xrightarrow{\cdot h} \mathcal{O}(-c_2) \longrightarrow \mathcal{O}_H(-c_2) \longrightarrow 0$$

erhält man das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & \mathcal{O}(-c_2-1) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathcal{O}(-c_2-1) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(-1)^{\oplus 2} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{O}(-1)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}(-c_2) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}(-c_2) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(-1)^{\oplus 2} \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_H(-c_2) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd},$$

dessen mittlere Spalte die gesuchte Auflösung für $F$ ist. Die restlichen Aussagen des Satzes ergeben sich unmittelbar aus dieser Auflösung.

**Bemerkung 2.8.** Sei $X$ die Inzidenzkorrespondenz $X = \{(x, H) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n\vee} \mid x \in H\}$, $p$ die Projektion auf $\mathbb{P}^n$, $q$ die Projektion auf $\mathbb{P}^n$. Wir haben gesehen, daß jede stabile reflexive Garbe $F$ vom Rang 2 mit $c_1 = -1$, $c_3 = c_2^2$, $c_2 > 1$ durch eine Extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^{\oplus 2} \longrightarrow F \longrightarrow \mathcal{O}_H(-c_2) \longrightarrow 0$$

gegeben werden kann. Diese Extensionen werden durch $H^0(\mathcal{O}_H(c_2))^{\oplus 2}$ klassifiziert. Daher kann man den Modulraum mit einem offenen Teil im Grassmann-Bündel $G_2(q_* p^* \mathcal{O}(c_2))$ identifizieren, er ist also rational. Für $c_2 = 1$ gewinnt man aus der Beilinson Spektralsequenz die Darstellung

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^{\oplus(n-2)} \longrightarrow T_{\mathbb{P}^n}(-2) \longrightarrow F \longrightarrow 0.$$

Die Zuordnung $F \mapsto S(F) \cong \mathbb{P}^{n-3}$ identifiziert den Modulraum $M^{st}_{\mathbb{P}^n}(-1, 1, 1, 2, \ldots)$ mit der Grassmann-Mannigfaltigkeit $G(n-3, n)$; insbesondere ist er vollständig.

## Literatur

[1] *W. Barth*, Some properties of stable rank-2 vector bundles on $\mathbb{P}_n$, Math. Ann. **226** (1977), 125—150.
[2] *A. Beilinson*, Coherent sheaves on $\mathbb{P}^N$ and problems of linear algebra, Func. Anal. Appl. **12** (1978), 214—216.
[3] *L. Ein*, Stable vector bundles on projective spaces in char $p > 0$, Math. Ann. **254** (1980), 53—72.
[4] *R. Hartshorne*, Stable reflexive sheaves, Math. Ann. **254** (1980), 121—176.
[5] *R. Hartshorne*, Stable vector bundles of rank 2 on $\mathbb{P}^3$, Math. Ann. **238** (1978), 229—280.
[6] *M. Maruyama*, Boundedness of semistable sheaves of small ranks, Nagoya Math. Journal **78** (1980), 65—94.
[7] *C. Okonek*, *M. Schneider*, *H. Spindler*, Vector bundles on complex projective spaces, Progress in Math. **3**, Boston 1980.
[8] *C. Okonek*, Reflexive Garben auf $\mathbb{P}^4$, Preprint.
[9] *C. Okonek*, Moduli reflexiver Garben und Flächen von kleinem Grad im $\mathbb{P}^4$, Preprint.

Mathematisches Institut der Universität, Bunsenstr. 3/5, D-3400 Göttingen

Eingegangen 17. Mai 1982